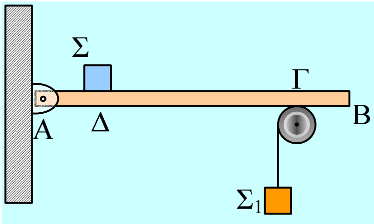
Ισορροπία και κίνηση. Αλλαγή με το χρόνο.



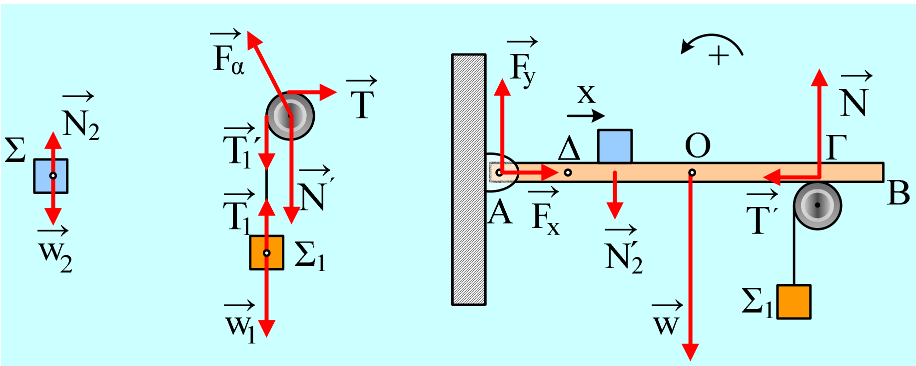
Μια ομογενής δοκός (ΑΒ) μήκους 6m και μάζας m_1 =10kg, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, αρθρωμένη στο ένα της άκρο Α σε κατακόρυφο τοίχο και στηριζόμενη σε τροχαλία σε σημείο Γ, το οποίο απέχει 1m από το άλλο της άκρο Β, όπως στο σχήμα. Στο σημείο Δ, όπου (ΑΔ)=1m ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας m_2=1kg, ενώ η τροχαλία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερόν οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχουμε περάσει ένα αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου κρέμεται ένα σώμα $Σ_1$, μάζας m=4kg, το οποίο συγκρατούμε με τεντωμένο το νήμα. Η τροχαλία έχει μάζα M=12kg, ακτίνα R=0,2m και παρουσιάζει με τη δοκό συντελεστές τριβής $μ_s$=0,65 και μ=0,5. Τη στιγμή t_0=0, το σώμα Σ δέχεται ένα κτύπημα, οπότε αρχίζει να κινείται κατά μήκος της δοκού με σταθερή ταχύτητα υ=1m/s, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε ελεύθερο το σώμα $Σ_1$. Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας I= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

i) Να υπολογίσετε την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι της χρονική στιγμή t_1=6s και να κάνετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

ii) Να υπολογίστε την κινητική ενέργεια της τροχαλίας τη στιγμή t_1 καθώς και την θερμική ενέργεια που παρήχθη στο μεταξύ, στην επαφή δοκού-τροχαλίας.

iii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τροχαλία-$Σ_1$, ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας, τη στιγμή t_1;

Απάντηση:



Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα όπου $N_2=N_2'$, N=N΄, T=T΄ (δράση-αντίδραση) και $T_1=T_1'$ η τάση του νήματος. Να σημειωθεί ότι αφού το σώμα Σ κινείται με σταθερή ταχύτητα δεν δέχεται τριβή από την δοκό.

i) Το σώμα Σ ισορροπεί οπότε ΣF=0 → $N_2=w_2=m_2g$=10N.

Η δοκός ΑΒ ισορροπεί, οπότε:

$ΣF_x=0 \rightarrow F_x-T'=0 \rightarrow F_x=T'$ (1), όπου T΄ η τριβή που ασκείται στην δοκό από την τροχαλία.

$$ΣF_y=0 \rightarrow F_y+N-N_2'-m_1g=0 \quad (2)$$

$$Στ_A=0 \rightarrow N\cdot(ΑΓ)-w\cdot(ΑΟ)-N_2'\cdot(ΑΔ+x)=0 \quad (3)$$

$$N\cdot 5=100\cdot 3+10\cdot(1+υt) \rightarrow N=(62+2t)N$$

Αλλά τότε $F_y = m_1g + N_2' - N = 100N + 10N - 62N - 2t\ N = 48 - 2t$ (N)

Το ερώτημα που μπαίνει τώρα είναι, τι τριβή ασκείται στο σημείο Γ; Είναι τριβή ολίσθησης ή στατική τριβή; Υπολογίζουμε την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, την οριακή τριβή: $T_{op} = \mu_s \cdot N = 0{,}65 \cdot (62+2t)$

Η μικρότερη τιμή της θα προκύψει για την αρχική θέση, όπου $T_{op} = 40{,}3N$.

Όμως αν υποθέσουμε ότι το σώμα Σ_1 ισορροπεί, οπότε δεν περιστρέφεται η τροχαλία, η τάση του νήματος έχει μέτρο ίσο με το βάρος του Σ_1, δηλαδή $T_1 = w_1 = mg = 40N$, οπότε η δύναμη που τείνει να στρέψει την τροχαλία έχει τιμή 40Ν και η ασκούμενη τριβή είναι στατική, μέτρου 40Ν. Αλλά τότε από την (1) έχουμε και $F_x = 40N$, για όσο χρόνο το σώμα Σ κινείται πάνω στη δοκό, δηλαδή μέχρι τη στιγμή:

$$t' = \frac{\ell - (A\Delta)}{\upsilon} = \frac{6-1}{1}s = 5s$$

Μόλις το σώμα Σ εγκαταλείψει τη δοκό, η εξίσωση (3) δίνει $N \cdot (A\Gamma) - w \cdot (AO) = 0 \rightarrow N = 60N$

Αλλά τότε $T_{op} = \mu_s \cdot N = 36N < 40N$.

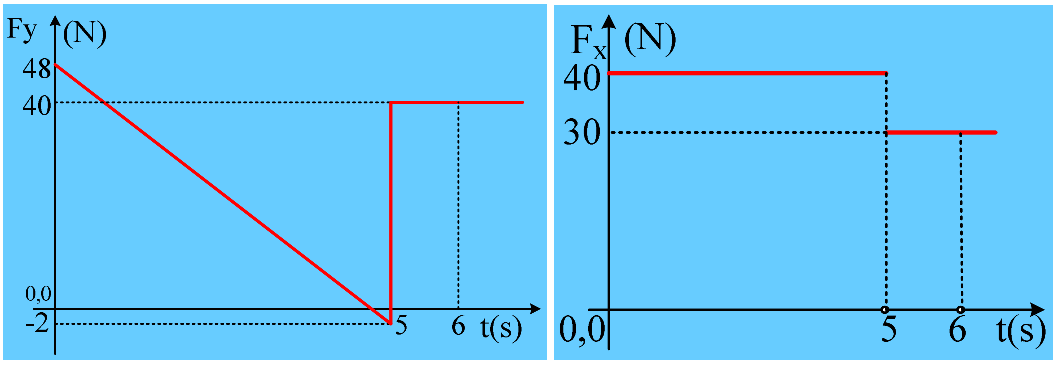
Συνεπώς η τροχαλία θα αρχίσει να στρέφεται και η τριβή θα είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο:

$$T = \mu \cdot N = 0{,}5 \cdot 60N = 30N$$

Και από την σχέση (1) $F_x = 30N$

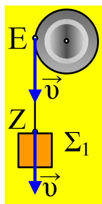
Ενώ από την ισορροπία στον άξονα y: $F_y + N - N_2' - m_1g = 0 \rightarrow F_y = m_1g - N = 40N$

Με βάση τα παραπάνω οι γραφικές παραστάσεις είναι:



ii) Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 6s - 5s = 1s$, όπου το σώμα Σ_1 κινείται περιστρέφοντας την τροχαλία έχουμε:

Για το σώμα Σ_1 ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει $\Sigma F = m\alpha \rightarrow mg - T_1 = m\alpha$ (4)



Για την τροχαλία εξάλλου έχουμε: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1' \cdot R - T \cdot R = ½ MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1' - T = ½ MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

Αλλά κάθε σημείο του νήματος κινείται με την ίδια ταχύτητα, συνεπώς $\upsilon_{\Sigma 1} = \upsilon_Z = \upsilon_E = \omega R$, οπότε με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} \rightarrow a = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Οπότε $T_1' - T = ½ M\alpha$ (5)

Από (4) και (5) παίρνουμε: $mg - T = (m + ½ M)\alpha \rightarrow a = \dfrac{mg - T}{m + \frac{1}{2}M} = \dfrac{4 \cdot 10 - 30}{4+6} = 1m/s^2$

Οπότε το σώμα Σ_1 τη στιγμή t_1 έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon = \alpha \cdot \Delta t = 1m/s$, έχοντας διανύσει απόσταση $y = ½\, \alpha \cdot (\Delta t)^2 = 0{,}5m$.

Η τροχαλία έχει τη στιγμή αυτή κινητική ενέργεια:

$$K= ½\ I\omega^2 = ½\ ½\ MR^2\omega^2 = ¼\ M\upsilon^2 = ¼\ 12\cdot 1^2 J= 3J.$$

Η μηχανική ενέργεια, στο παραπάνω χρονικό διάστημα, που μετατρέπεται σε θερμική είναι κατ' απόλυτο τιμή ίση με το έργο της ροπής της τριβής ολίσθησης:

$$Q=|W_T|=\tau\cdot\theta= TR\cdot\theta= T\cdot y= 30\cdot 0,5J=15J.$$

iii) Για το σύστημα τροχαλία-Σ_1 έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = w_1R - TR = (4\cdot 10\cdot 0,2 - 30\cdot 0,2)kgm^2/s^2 = 2kgm^2/s^2$$

dmargaris@sch.gr