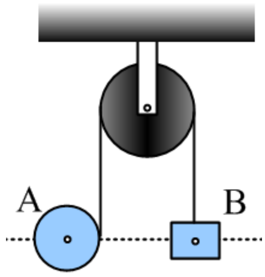
Μια τροχαλία, ένα γιο-γιο και ένας κύβος.

Γύρω από έναν κύλινδρο (γιο-γιο) Α, μάζας m_1=0,3kg έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από μια τροχαλία, στο άλλο άκρο του δένουμε έναν κύβο Β, όπως στο σχήμα. Συγκρατούμε τα δύο σώματα, με τεντωμένο το νήμα, στο ίδιο ύψος.



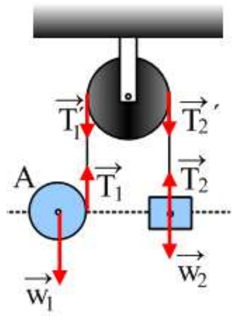
i) Αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα και παρατηρούμε ότι το σώμα Β παραμένει ακίνητο στη θέση του. Να βρεθεί η μάζα του σώματος Β.

ii) Αντικαθιστούμε τον κύβο Β, με άλλον Β΄, μάζας m_2=0,2kg και επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αφήνοντας ελεύθερα τα δυο σώματα τη στιγμή t_0=0. Αν η μάζα της τροχαλίας είναι ίση με Μ=0,4kg, να βρεθεί η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σωμάτων Α και Β΄ τη χρονική στιγμή t_1=0,5s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου και της τροχαλίας $I_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2$ και $I_2 = \frac{1}{2} MR^2$, $g=10m/s^2$ ενώ το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας.

Απάντηση:

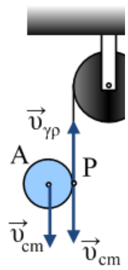
i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα, όπου αφού ο κύβος Β παραμένει ακίνητο, $T_2=w_2$. Αλλά αφού το νήμα είναι αβαρές $T_2=T_2'$και εφόσον, δεν μετακινείται ο κύβος Β, δεν στρέφεται ούτε η τροχαλία και κατά συνέπεια $T_1'=T_2'$ ίση κατά μέτρο με την T_1. Για τον κύλινδρο:



$$\Sigma F=m_1 \cdot \alpha_{cm} \rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 \cdot \alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1 \cdot r = \tfrac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αν πάρουμε το άκρο Ρ του νήματος που εφάπτεται στον κύλινδρο, έχει μια ταχύτητα ίση με υ_{cm} του κυλίνδρου εξαιτίας της μεταφορικής κίνησής του και μια γραμμική $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega \cdot r$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησης. Αλλά σαν σημείο του νήματος παραμένει ακίνητο, συνεπώς $\upsilon_{cm}=\omega \cdot r$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε:



$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r \rightarrow a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r$ και η σχέση (2) γίνεται $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \alpha_{cm}$ (3).

Από (1) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $m_1 g = \frac{3}{2} m_1 \alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2g}{3}$, οπότε:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \frac{2g}{3} = \frac{1}{3} m_1 g = w_2 \rightarrow m_2 = \frac{1}{3} m_1 = 100g = 0{,}1kg.$$

ii) Βάζοντας κύβο μεγαλύτερης μάζας, δεν θα ισορροπεί πλέον, αλλά θα κινηθεί προς τα κάτω, συνεπώς η τροχαλία θα περιστραφεί με φορά ίδια με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

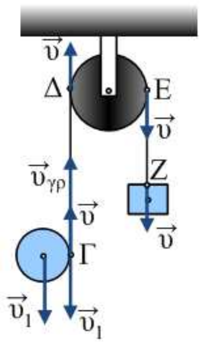
Για τον κύλινδρο: $\Sigma F=m_1 \cdot \alpha_1 \rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 \cdot \alpha_1$ (1) και

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1 \cdot r = \tfrac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow T_1 = \tfrac{1}{2} m_1 \cdot r \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 1} \quad (2)$$

Για τον κύβο (θετική φορά προς τα κάτω) $\Sigma F=m_2 \cdot \alpha_2 \rightarrow m_2 g - T_2 = m_2 \cdot \alpha_2$ (3)

Για την τροχαλία: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \rightarrow T_2' \cdot R - T_1' \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \rightarrow$

$$T_2' - T_1' = \tfrac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \text{ ή } T_2 - T_1 = \tfrac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \quad (4)$$



Τα σημεία Γ, Δ, Ε και Ζ του νήματος έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου.

Αλλά $υ=υ_Γ=υ_{γρ}-υ_1 \rightarrow υ=ω\cdot r-υ_1$, όπου $υ_1$ η ταχύτητα πτώσης του άξονα του κυλίνδρου, ενώ $υ=υ_Δ=ω_{τρ}\cdot R=υ_Ζ=υ_2$ οπότε:

$$υ_2=ω_{τρ}\cdot R=ω\cdot r-υ_1 \rightarrow \frac{dυ_2}{dt}=\frac{dω_{τρ}}{dt}R=\frac{dω}{dt}\cdot r-\frac{dυ_1}{dt} \text{ ή}$$

$$α_2=α_{γων2}\cdot R=α_{γων1}\cdot r-α_1 \quad (5)$$

Από (1)-2x(2) παίρνουμε: $m_1g-3T_1=m_1(α_1-α_{γων}\cdot r) \rightarrow T_1=\frac{m_1g+m_1a_2}{3}$ (6)

Με πρόσθεση τώρα των (3), (4) και (6) κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $T_1΄=T_1$ και $T_2΄=T_2$ παίρνουμε:

$$m_2g-T_2+T_2΄-T_1΄+T_1=m_2\cdot α_2+½\, MR\cdot α_{γων2}+\frac{m_1g+m_1a_2}{3} \rightarrow$$

$$(m_2+½\, M+⅓\, m_1)α_2=m_2g-⅓m_1g \rightarrow α_2=\frac{m_2-\frac{m_1}{3}}{\frac{1}{3}m_1+m_2+\frac{1}{2}M}g$$

Και με αντικατάσταση $α_2 = 2m/s^2$.

Αλλά τότε από την (3) $T_2=m_2(g-α_2) = 1{,}6N$ και από την (4) $T_2-T_1 = ½\, MR\cdot α_{γων2} \rightarrow T_1=1{,}2N$ και η (1) μας δίνει $m_1g-T_1=m_1\cdot α_1 \rightarrow α_1=6m/s^2$.

Σε χρονικό διάστημα t ο κύλινδρος κατέρχεται κατά $y_1= ½\, α_1t^2$, ενώ ο κύβος κατά $y_2= = ½\, α_2t^2$, συνεπώς η κατακόρυφη απόσταση των δύο σωμάτων είναι:

$$Δy=y_1-y_2= ½\,(α_1-α_2)t^2 = ½\,(6-2)\cdot 0{,}5^2 =0{,}5m.$$

dmargaris@sch.gr