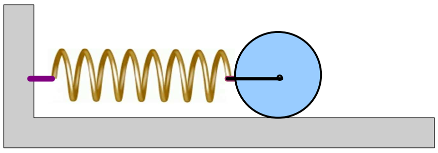
Τρία στερεά σε δύο ταλαντώσεις



Τρία ίδιας μάζας M=3/14 Kg και ίδιας ακτίνας στερεά σώματα ,ένας λεπτός δίσκος, μία σφαίρα και ένα δαχτυλίδι μπορούν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το καθένα από τα παραπάνω σώματα δένεται με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς K=120N/m με το κέντρο του κάθε στερεού ενώ η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι μόνιμα στερεωμένη. Το κάθε στερεό ισορροπεί και στο καθένα από αυτά και την στιγμή t=0 ασκούμε στο κέντρο του σταθερή οριζόντια δύναμη F=60N έτσι ώστε το κάθε ελατήριο να μπορεί να επιμηκύνεται.

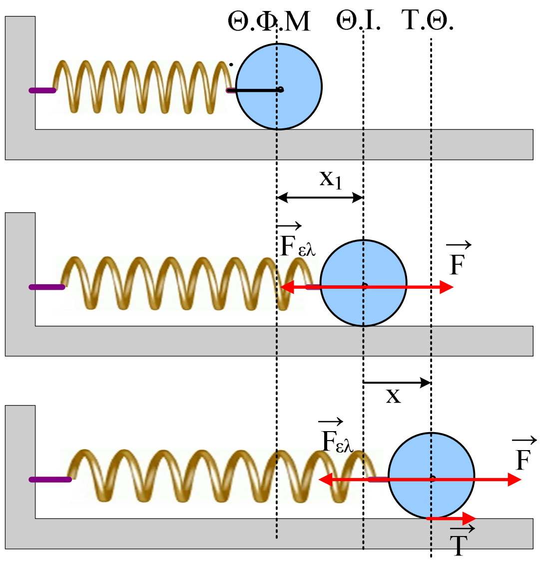
α) Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. καθώς και να βρεθεί πόσο θα είναι τότε το πλάτος ταλάντωσης του κέντρου μάζας του κάθε στερεού;

β) Μετά από πόσο χρόνο πρέπει να καταργηθεί η δύναμη στο καθένα από τα παραπάνω στερεά έτσι ώστε να σταματήσει η περιοδική κίνηση του κάθε στερεού. Ποιο κέντρο μάζας κάποιου από τα παραπάνω στερεά θα μπορούσε να σταματήσει πρώτο;Σε πόσο χρόνο;

γ) Αν καταργηθεί η εξωτερική δύναμη θα συνεχίσει το κέντρο μάζας του κάθε στερεού να εκτελεί γ.α.τ.Σε ποια θέση σε σχέση με το φυσικό μήκος του κάθε ελατηρίου θα πρέπει να καταργηθεί η κάθε δύναμη για ταλαντώνεται το σύστημα με την μέγιστη ενέργεια ταλάντωσης;

Δίνονται ο ροπές αδράνειας $I_{δαχ}=MR^2$ $I_{δισκ}=0,5MR^2$ και $I_{σφ}=0,4MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α)Για τη θέση ισορροπίας του κέντρου μάζας θα ισχύει:

$$F=kx_1 \ (1)$$

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του κάθε στερεού ισχύει

$ΣF=Ma_{cm}$ και για μία τυχαία θετική απομάκρυνση:

$$k(x+x_1)-F-T=Ma_{cm} \ (2)$$

Για την στροφική κίνηση του κάθε στερεού ισχύει

$Στ=Ια_{γων}$ άρα $TR=λMR^2α_{γων}$ άρα $T=λMa_{cm}$ (3)

Από (1),(2) &(3) $T=λκx/(1+λ)$ (5)

Για την ταλάντωση και για μία θετική απομάκρυνση με τη βοήθεια της σχέσης (5) θα έχουμε:

$$ΣF=F+T-F_{ελ}=-κx/(λ+1)$$

Αρα το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. με D=k/(λ+1)

Το κάθε στερεό την στιγμή t=0 ήταν ακίνητο άρα το κέντρο μάζας του βρισκόταν στην θέση x=-A.Η θέση ισορροπίας για κάθε στερεό βρισκόταν στην θέση ΣF=0 άρα $F=F_{ελ}$ άρα $60=120x_1$ άρα $x_1=A=0,5m$.

β)Αν καταργηθεί η εξωτερική δύναμη F τότε για να σταματήσει την περιοδική κίνησή το κέντρο μάζας του κάθε στερεού θα πρέπει να ισορροπεί. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το εκτελεί ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει για το χρόνο εφαρμογής της δύναμης t= $t = NT = N \cdot 2\pi\sqrt{\dfrac{M(1+\lambda)}{k}}$ με N να ανήκει στους ακεραίους.

Ο μικρότερος χρόνος φυσικά αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση και στην μικρότερη τιμή του λ. Αρα το κέντρο μάζας της σφαίρας θα μπορούσε να σταματήσει πρώτο σε χρόνο t=π/10 sec.

γ)Μετά την κατάργηση της εξωτερικής δύναμης η θέση ισορροπίας του κάθε συστήματος μεταφέρεται στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του κάθε στερεού ισχύει

$\Sigma F=Ma_{cm}$ και για μία τυχαία θετική απομάκρυνση $kx-T=Ma_{cm}$ (6)

Για την στροφική κίνηση του κάθε στερεού ισχύει

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα $TR=\lambda MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ άρα $T=\lambda Ma_{cm}$ (7)

Από (6) &(7) T=λκx/(1+λ) (8)

Για την ταλάντωση και για μία θετική απομάκρυνση με τη βοήθεια της σχέσης (8) θα έχουμε

ΣF=T-Fελ=-κx/(λ+1)

Άρα και πάλι το κέντρο μάζας του κάθε στερεού εκτελεί γ.α.τ. με D=k/(λ+1)

Η ενέργεια ταλάντωσης ισοδυναμεί με το έργο της εξωτερικής δύναμης F.Το έργο αυτό θα είναι μέγιστο όταν η μετατόπιση του σώματος είναι η μέγιστη και αυτό συμβαίνει μέχρι το κάθε στερεό να φτάσει στην μέγιστη θέση απομάκρυνσης. Άρα όταν το ελατήριο έχει την μέγιστη δυνατή του απομάκρυνση δηλαδή x_{max}=2A=1m.

Χρήστος Ελευθερίου

xristoselef@gmail.com